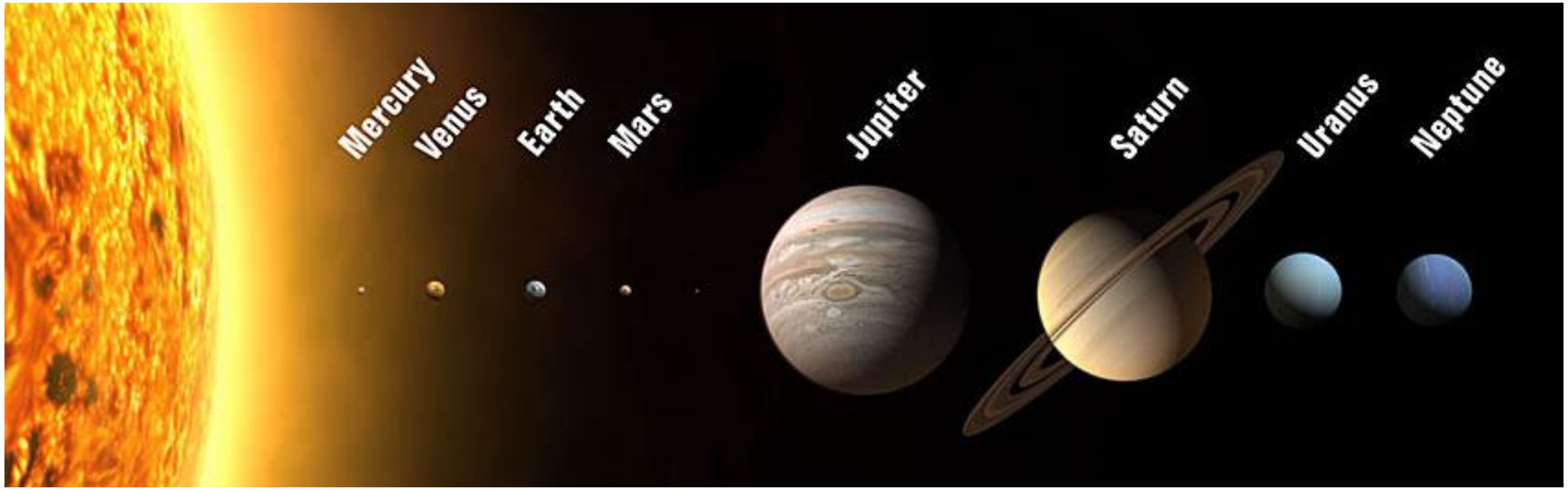
Cours 20 – 21/11/2024

9. Moment cinétique; Force de gravitation; Satellites

9.1. Moment cinétique

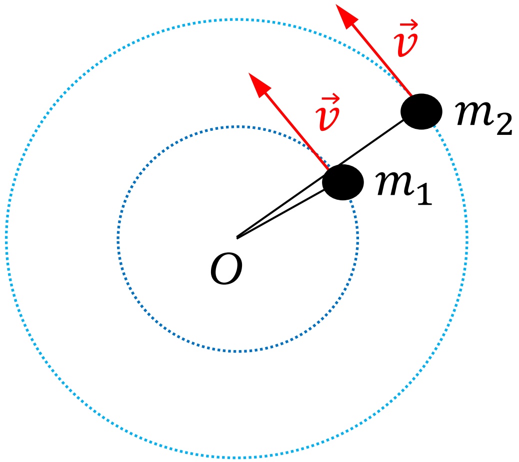
9.2. Force de gravitation



■ Introduction: Moment cinétique

du latin *momentum* qui est la contraction
de *movimentum* qui veut dire mouvement

Mouvement circulaire uniforme dans un plan



- La quantité de mouvement est $\vec{p} = m\vec{v}$, donc elle n'est pas conservée dans un mouvement circulaire uniforme.

- La vitesse est constante, donc $p = mv$ constante.

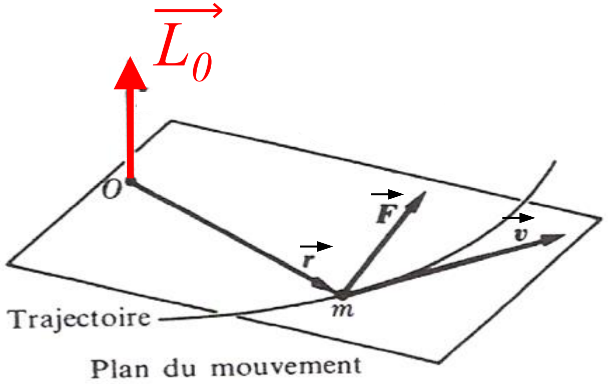
- Les particules 1 et 2 ayant la même vitesse, $p=mv$ identique pour les deux. Pourtant, le mouvement n'est pas le même. Comment définir une grandeur qui représente les caractéristiques d'un mouvement circulaire ?

➡ on introduit une nouvelle grandeur physique que l'on appelle le moment cinétique

9.1. Moment cinétique

■ Définition du moment cinétique

Le moment cinétique $\vec{L}$, défini par rapport au point O, s'écrit :



$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan défini par $\vec{r}$ et $\vec{v}$

Le moment cinétique se calcule par rapport à un point fixe (ici le point O)

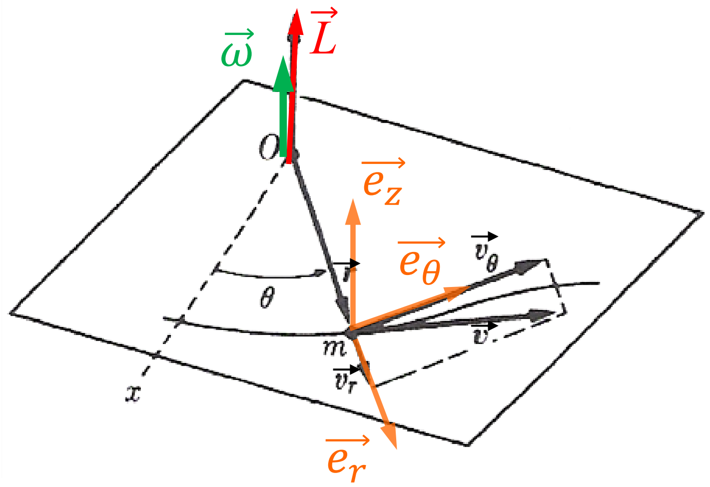
Attention : le moment cinétique dépend du choix de l'origine

$\Rightarrow$ il faut toujours préciser l'origine et ne jamais combiner des moments cinétiques ayant des origines différentes.

Remarque : l'origine est un point fixe par définition.

9.1. Moment cinétique

■ Mouvement curviligne ($r \neq cte$)



La vitesse peut être décomposée en une composante radiale ($\vec{v_r}$) et une composante transversale ($\vec{v_\theta}$), soit $\vec{v} = v_r\,\vec{e_r} + v_\theta\,\vec{e_\theta}$

En posant ρ le rayon de courbure, tel que $\vec{r} = \rho\,\vec{e_r}$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\rho\,\vec{e_r} \times v_r\,\vec{e_r} + m\rho\,\vec{e_r} \times v_\theta\,\vec{e_\theta}$$

or $\vec{e_r} \times \vec{e_r} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{L_O} = m\rho\,\vec{e_r} \times v_\theta\,\vec{e_\theta} = m\rho\,v_\theta\,\vec{e_z}$

Nous avons par ailleurs $v_\theta = \rho\dfrac{d\theta}{dt} = \rho\,\omega$

Finalement, le moment cinétique s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = m\rho^2\,\vec{\omega}}$

9.1. Moment cinétique

Théorème du moment cinétique

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=\,0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

On applique la 2ème loi de Newton : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \sum_i \overrightarrow{F_{ext,i}}$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \times \sum_i \overrightarrow{F_{ext,i}} = \sum_i \overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{F_{ext,i}}\right)}$$

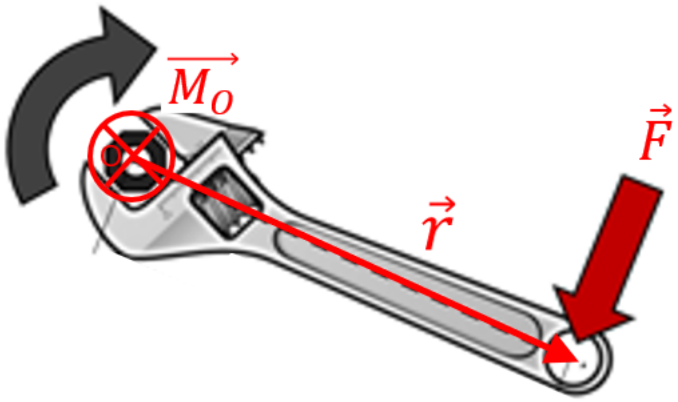
$\overrightarrow{M_O}(\vec{F_i})$ est le moment de la force $\vec{F_i}$ par rapport à O (point fixe)

La dérivée par rapport au temps du <u>moment cinétique</u>, calculé par rapport à un point fixe, est égale au <u>moment</u> de la force appliquée.

Le <u>moment</u> de force doit être défini par rapport au <u>même point fixe</u>.

9.1. Moment cinétique

■ Moment d'une force



$$\boxed{\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

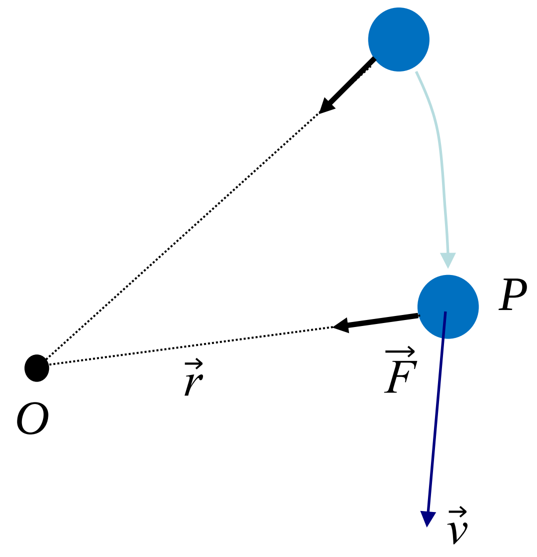
- Le vecteur $\vec{r}$ est défini tel que son origine est sur l'axe de rotation et son extrémité au point d'application de la force.

- $M_O = r\,F\,sin\theta$, θ étant l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{F}$. On reconnait ici la norme d'un produit vectoriel.

- Le moment de force est maximum quand $\vec{F}$ est perpendiculaire au bras de la clé. Il est nul quand la force est colinéaire à $\vec{r}$. Dans ce cas, la mise en rotation est impossible.

Le vecteur "Moment de force" est colinéaire à $\vec{\omega}$, est donc aussi à $\overrightarrow{L_O}$.

Force centrale



Le mouvement a lieu dans un plan défini par $\vec{r}$ et $\vec{v}$

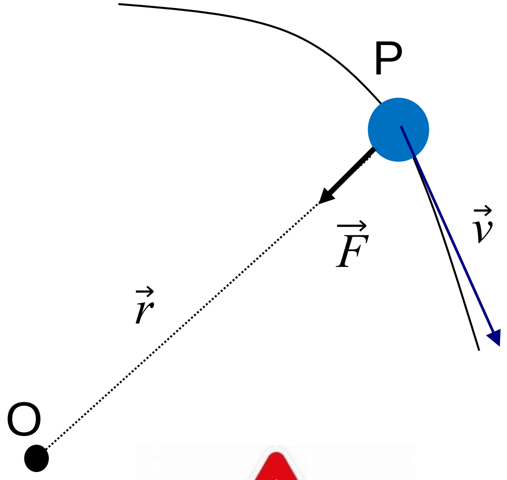
<u>Définition</u> : soit un point P soumis à une force $\vec{F}$, celle-ci est dite <u>centrale</u> si quelque soit la position de P, la force $\vec{F}$ est dirigée vers O (appelé centre de force)

$\vec{F}$ dépend de la distance $OP = r$

Ce type de force existe sous différentes formes dans la nature :

- *La gravitation*
- *La force électrostatique*
- *La force de rappel d'un ressort*

Théorème du moment cinétique



Cas d'une force centrale :

Dans ce cas, $\vec{F}$ colinéaire à $\vec{r}$ d'où $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$

et la dérivée temporelle du moment cinétique est nulle.

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \implies \overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{cte}}$$

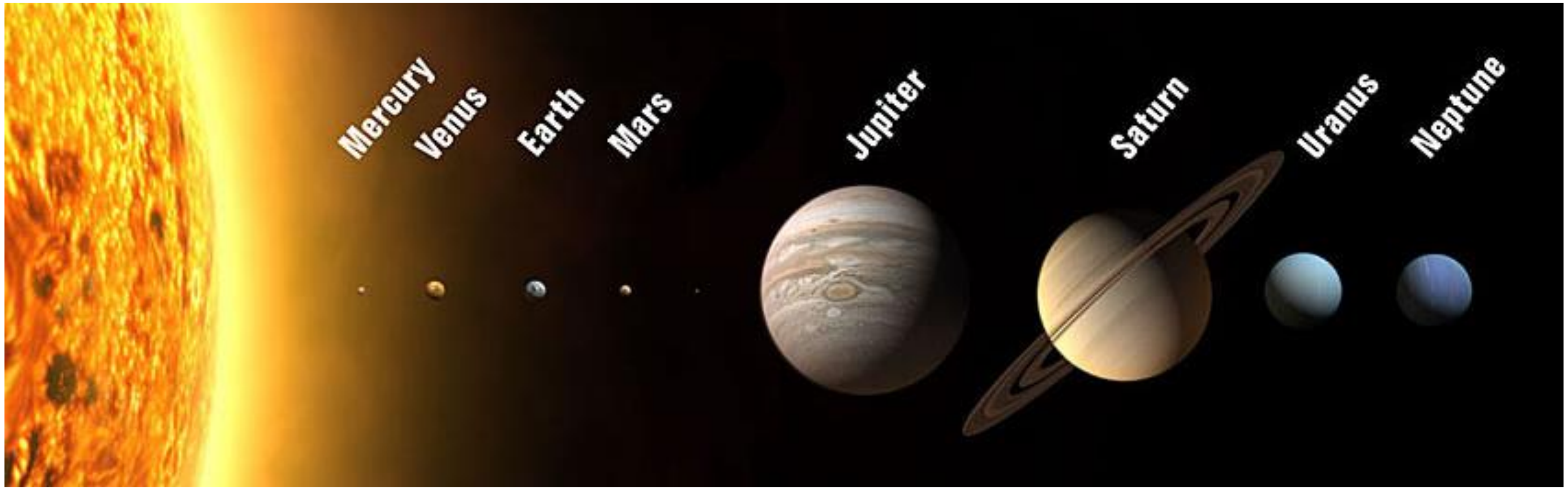
Quand un objet se déplace sous l'action d'une force centrale, son moment cinétique est constant dans le temps.

<u>Exemple</u> : la force de gravitation responsable du mouvement des planètes autour du soleil est une force centrale, donc le moment cinétique des planètes est constant. Cette caractéristique gouverne leur mouvement.

9.2. Force de gravitation

■ Introduction

Notre galaxie : la voie lactée

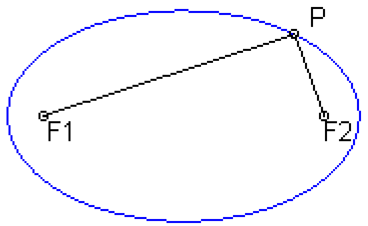


Le système solaire

Exoplanète la plus proche : Proxima Centauri b à 4,2 années-lumière

9.2. Force de gravitation

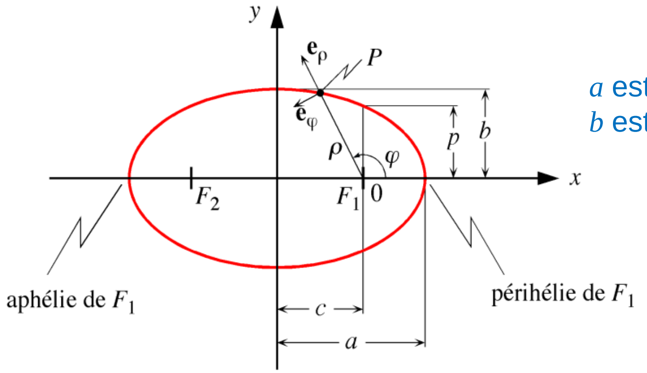
■ 1ères Observations



Tycho Brahé (fin XVIème) observe les planètes de notre système solaire et détermine leur trajectoire avec une très grande précision.

En 1609, Johannes Kepler en tire les conclusions suivantes (lois de Kepler) :

1. Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers



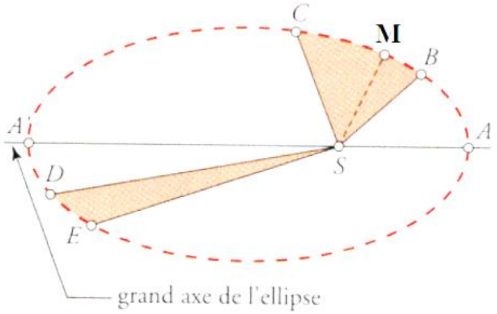
a est le « demi-grand axe »
b est le « demi-petit axe »

Mars : b/a = 0,996
Terre: b/a = 0,99986

2. Le rayon-vecteur (vecteur position $\vec{r}$) de chaque planète balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux

Puis en 1619, en comparant la trajectoire de 2 planètes :

3. Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des planètes au Soleil



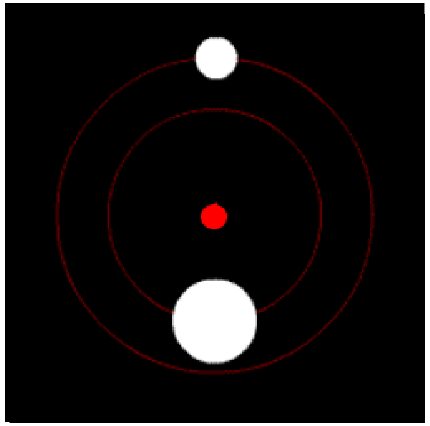
$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad \text{soit encore} \quad \boxed{\frac{T^2}{a^3} = cte}$$

https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Planetes/Aires_FJ.php

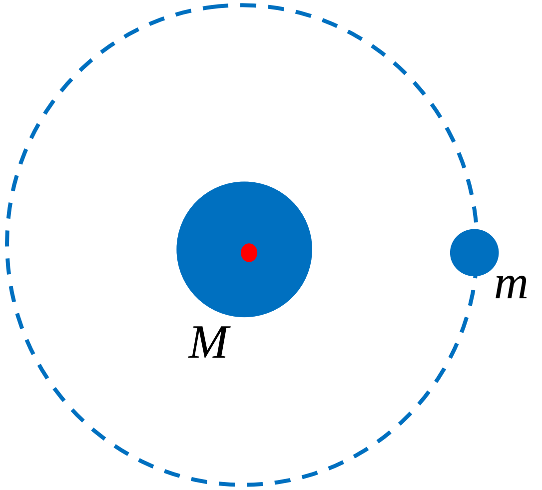
9.2. Force de gravitation

■ Mouvement orbital

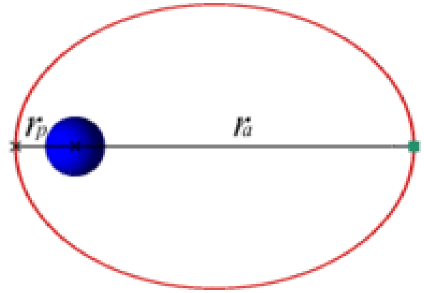
Deux corps en interaction gravitationnelle avec des masses relativement proches présentent un mouvement de rotation autour du centre de masse du système.

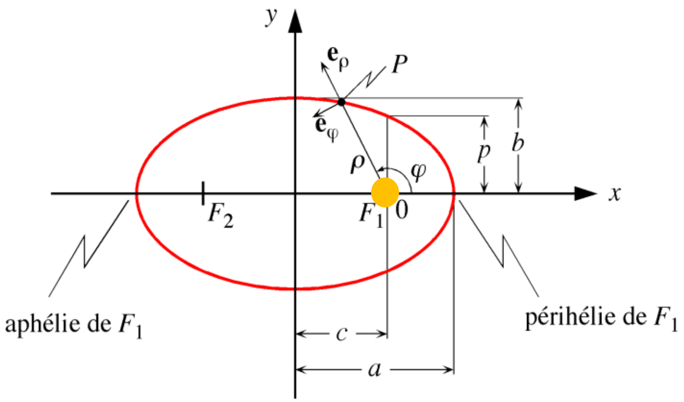


Si la masse M de l'un des corps (A) est beaucoup plus importante que la masse m de l'autre corps (B), alors le centre de masse du système est quasiment confondu avec celui de A. La conséquence est que le mouvement devient un mouvement orbital de B autour de A.



Trajectoire elliptique

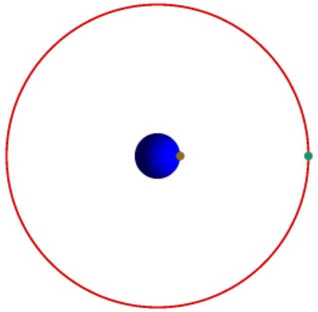




Trajectoire circulaire

Mars : $\dfrac{b}{a} = 0{,}996$

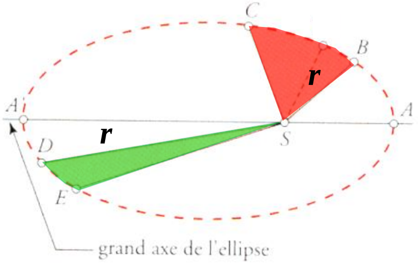
Terre : $\dfrac{b}{a} = 0{,}99986$



En première approximation, les trajectoires des planètes autour du soleil comme "circulaires".

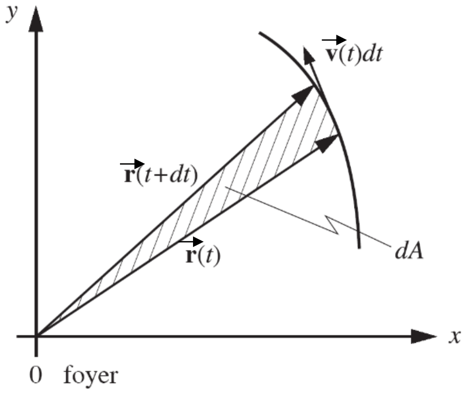
9.2. Force de gravitation

2ème loi de Kepler (ou loi des aires)



Enoncé : le rayon-vecteur (vecteur position $\vec{r}$) balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux

Conséquence : plus le rayon est petit, plus la vitesse est grande



$d\vec{A}$ est l'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant un intervalle de temps dt :

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\,(\vec{r} \times \vec{v}dt)$$

Dans le cas d'une force centrale :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0} \quad \text{soit } \overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{cte}$$

or $\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{L_O}}{m} = \vec{r} \times \vec{v}$

$$\boxed{d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}\, dt) = \frac{\overrightarrow{L_O}}{2m}\, dt = cte}$$

9.2. Force de gravitation

■ La force de gravitation

En 1677, Newton explique les lois de Kepler

⇒ il trouve que l'accélération centripète, liée au mouvement quasi-circulaire de chaque planète, est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$ avec une constante de proportionnalité identique d'une planète à une autre.

<u>Proposition de Newton</u> : il existe une force qui agit sur la planète et qui est dirigée vers le Soleil.

⇨ Cette force est la force de gravitation.

9.2. Force de gravitation

3ème loi de Kepler : mise en évidence de la gravitation

Enoncé de la 3ème loi de Kepler : Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des planètes au Soleil

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cte}$$

La 3ème loi de Kepler découle directement de la gravitation universelle

Démonstration :

3ème loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{a^3} = cte = k_1 \Rightarrow \dfrac{1}{T^2} = \dfrac{1}{k_1 a^3} \approx \dfrac{1}{k_1 r^3}$

Simplification : *ellipse (a demi-grand axe)* $\Rightarrow$ *cercle de rayon r*

Mouvement circulaire : $a_n = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = r\,4\pi^2\,\dfrac{1}{T^2}$

d'où $a_n = \dfrac{r\,4\pi^2}{k_1 r^3} = \left(\dfrac{4\pi^2}{k_1}\right)\dfrac{1}{r^2}$

2ème loi de Newton : $F = ma$ (m masse de la planète)

soit $\boxed{F = \left(\dfrac{4\pi^2}{k_1}\right)\dfrac{m}{r^2}}$

On reconnait ici la force de gravitation

La constante k_2 est proportionnelle à la masse du soleil

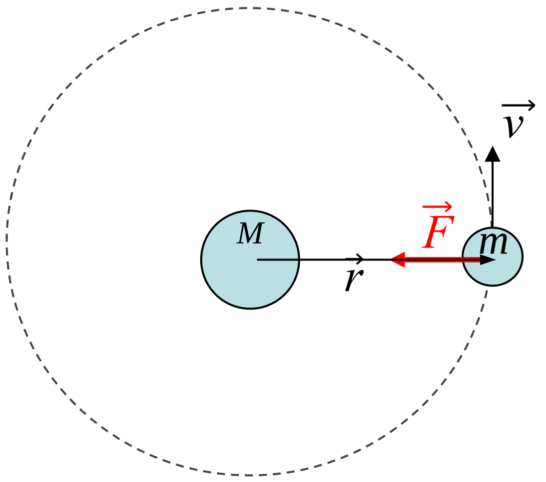
9.2. Force de gravitation

La force de gravitation

3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = cte$

2nd loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$ avec $a = \frac{v^2}{r}$ pour un mouvement circulaire

$$F = \left(\frac{4\pi^2}{k_1}\right)\frac{m}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{4\pi^2}{k_1} = GM_{soleil} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$$



Avec $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ vecteur unitaire

G = $(6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ la constante gravitationnelle.

Cette force est aussi le poids à la surface de la Terre :

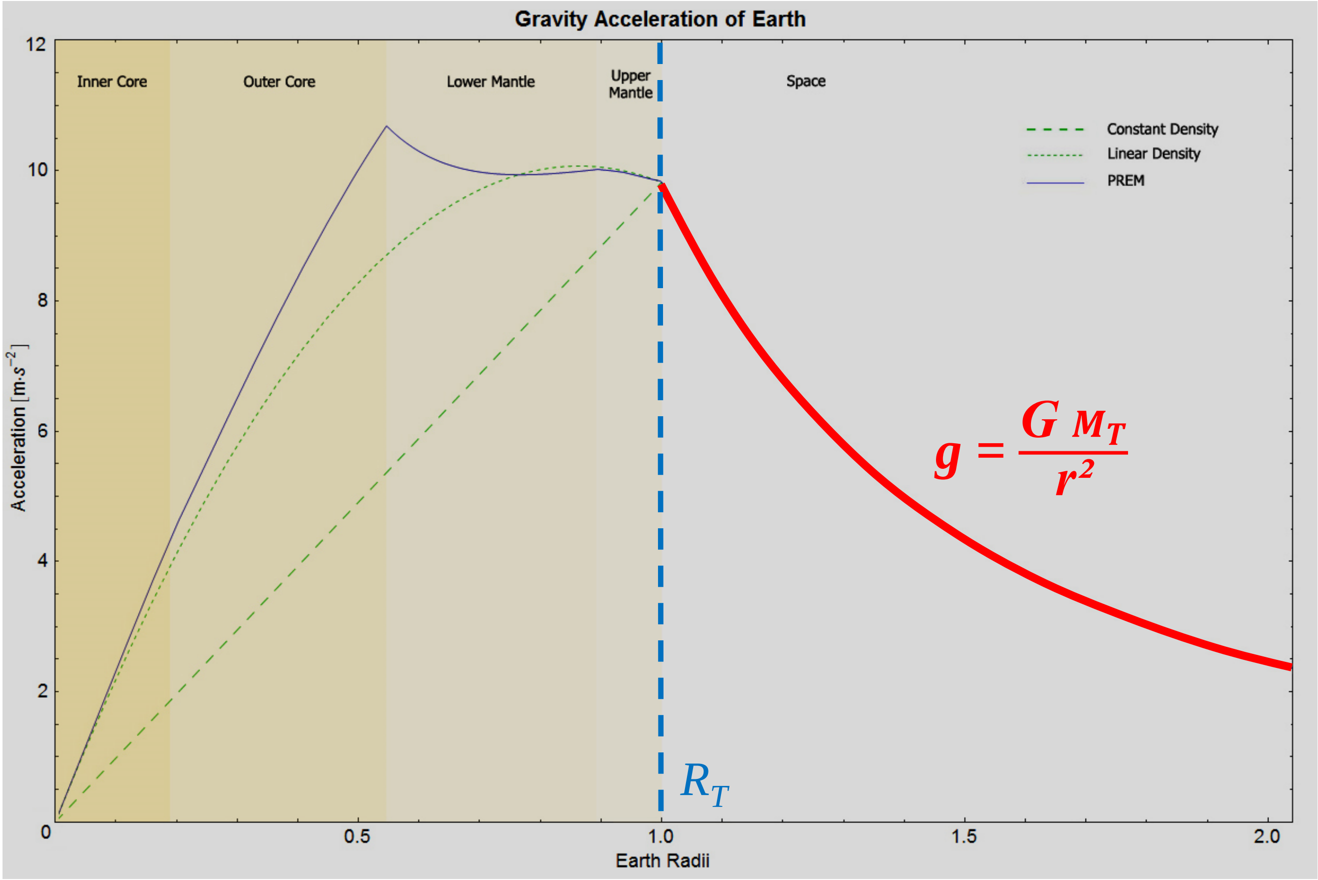
$$\frac{GM_T\, m}{{R_T}^2} = mg \quad d'où \quad \boxed{g = \frac{G\, M_T}{{R_T}^2}}$$

(avec R_T et M_T rayon et masse de la Terre)

9.2. Force de gravitation

La force de gravitation

Evolution de l'accélération g à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre



$r = R_T + h$

h : altitude

R_T : rayon de la Terre

9.2. Force de gravitation

■ Période « képlérienne »

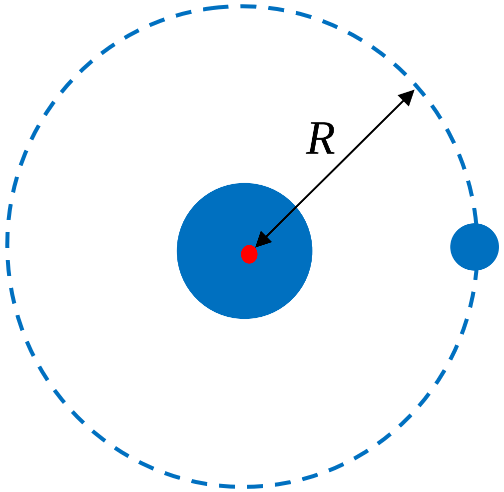
$$F = \frac{mGM}{R^2}$$

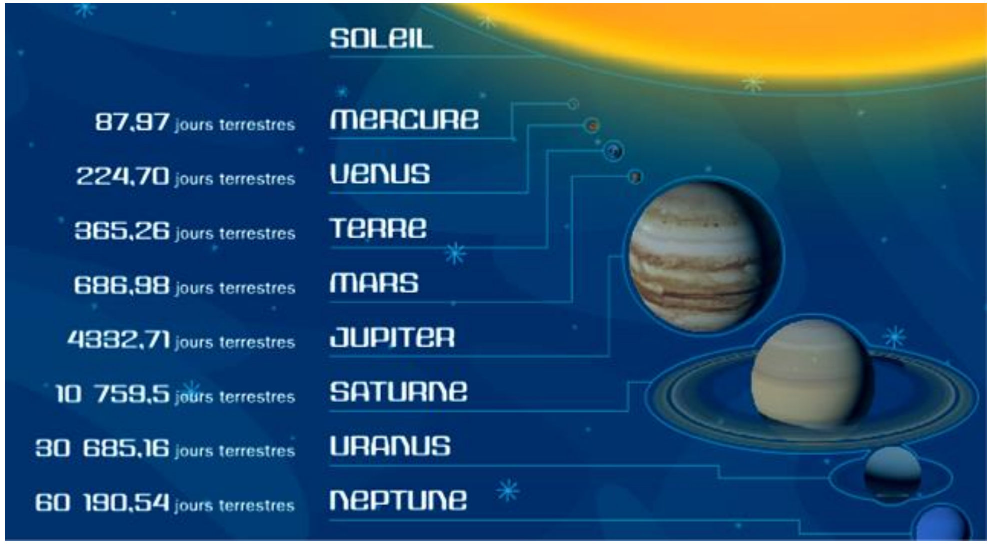
Attention : R est le rayon de l'orbite et correspond à la distance prise entre les centres de masse des deux objets considérés.

$$a_n = \frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} = \mathrm{R}\omega^2 = \mathrm{R}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$$ Période "képlérienne"

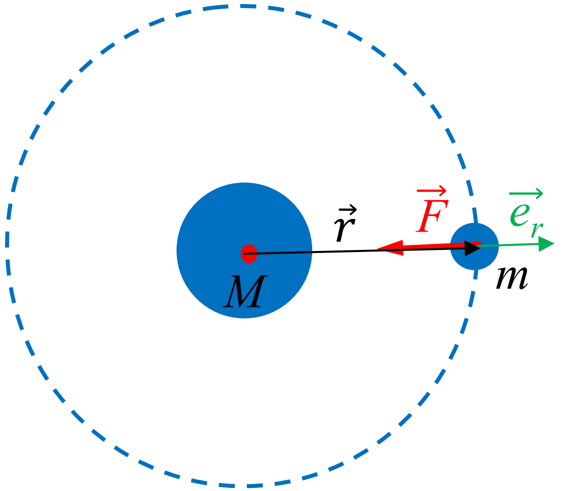
T est la durée de révolution ou période « képlérienne »





9.2. Force de gravitation

■ Vitesse orbitale (vitesse de rotation pour une orbite de rayon R)



$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r} \\ \vec{a_n} &= -\frac{v^2}{r}\vec{e_r}\end{aligned}\right\}$$

On applique la 2nd loi de Newton et on projette :

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Pour une orbite de rayon R :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Vitesse orbitale

A chaque orbite de rayon R correspond une vitesse orbitale